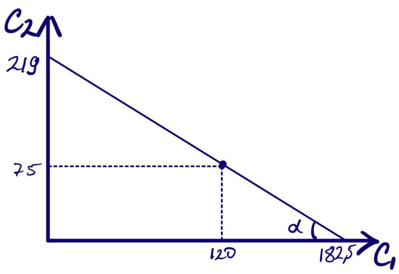
. 11 класс. Задача 1. Подарок от бабушки (45 баллов)

$w_1 = 120 \qquad w_2 = 75 \qquad U(c_1, c_2) = 120ln(c_1) + \delta c_2$

1. $r = 20\%$
   Приведенная стоимость потребления за два года должна быть равна приведенной стоимости дохода за два года: $c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1 + \dfrac{w_2}{1+r}$ или $c_1 + \frac{c_2}{1,2} = 120 + \frac{75}{1,2} = 182,5$ (МБО) **(4 балла)**



$tg\alpha = 1{,}2$
точка (120;75) - точка автономного потребления, точка Полония

(3 балла)

Задача:

$$\begin{cases} U(c_1, c_2) = 120ln(c_1) + \delta c_2 \xrightarrow[c_1, c_2]{} max; \\ c_1 + \frac{c_2}{1{,}2} = 182{,}5; \\ c_1 > 0, c_2 \geq 0. \end{cases}$$

3 балла, необходимо проверить, правильно ли найдено ограничение по уровню расходов в каждом периоде

Необходимо отметить, что может быть угловое решение относительно c_2. Потребление c_1 должно быть строго положительным.

2. Здесь возможно два вида решения: внутреннее и угловое. Рассмотрим оба.

   - внутреннее: $c_1 > 0, c_2 > 0$
     выражаем из МБО c_2 через c_1:
     $U(c_1) = 120ln(c_1) + \delta(219 - 1{,}2c_1) \xrightarrow[c_1]{} max$**(4 балла)**
     $U'(c_1) = \frac{120}{c_1} - 1{,}2\delta = 0$
     $U''(c_1) = -\frac{120}{c_1^2} < 0$ **(2 балла)**$\Rightarrow$ $max c_1^* = \frac{100}{\delta}, c_2^* = 219 - \frac{120}{\delta}$
     $U^*(c_1^*, c_2^*) = 120ln(\frac{100}{\delta}) + 219\delta - 120 = 120ln(100) - 120ln(\delta) + 2219\delta - 120$ т.к. $\delta < 1$, полезность возрастет по величине δ. Оценим полезность по минимальному значению $\delta = \frac{2}{3}$: **(1 балла)**
     $U^*(c_1^*, c_2^*, \delta = \frac{2}{3}) = 120 \times 4{,}6 - 120 \times (-0{,}4) + 219 \times \frac{2}{3} - 120 = 626$
   - угловое решение $c_1 > 0, c_2 = 0$
     В этом случае потребление $c_1^\circ = 182{,}5$, а полезность равна $U^\circ(c_1^\circ = 182{,}5; c_2^\circ = 0) = 624$
     Видно, что даже при минимальном значении δ, Петя получает бОльшую полезность при внутреннем решении **(4 балла)**

3. $r = 20\%$ (депозит);
   $i = 25\%$ (кредит).

   Теперь МБО Пети будет состоять из двух сегментов в зависимости от того, является ли он заёмщиком или сберегателем.

   Если сберегатель: $\begin{cases} c_1 = 120 - s_1; \\ c_2 = 75 + 1{,}2s_1; \end{cases}$ или $c_2 = 75 + 1{,}2(120 - c_1)$, если $c_1 < 120$. **(4 балла)**

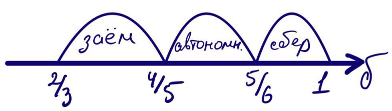
   Если заёмщик: $\begin{cases} c_1 = 120 + b_1; \\ c_2 = 75 - 1{,}25b_1; \end{cases}$ или $c_2 = 75 + 1{,}25(c_1 - 120)$, если $c_1 > 120$.**(4 балла)**

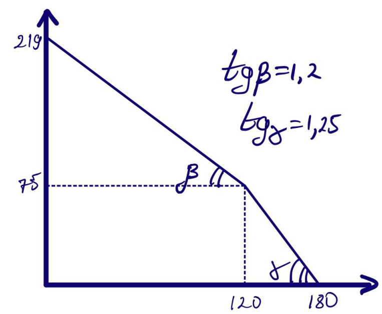
   Из оптимизационной задачи известно, что решение является внутренним ($\delta > 2/3$). Необходимо узнать, при каких значения δ Петя станет заёмщиком или сберегателем.

   Если Петя сберегает, то $c_1 = \frac{120}{1{,}2\delta} < 120$, т.е. $\delta > 5/6$.**(3 балла)**

   Если Петя заёмщик, то $c_1 = \frac{120}{1{,}25\delta} > 120$, т.е. $\delta < 4/5$.**(3 балла)**

   Значит при $\delta \in [4/5; 5/6]$ **(2 балла)** Петя расходует в каждом периоде свой доход, не используя услуги банка. Штраф **(1 балл)** за нестрогое включение





4. t = 20% на сумму к выплате по вкладу. Нас интересует только сегмент, где Петя является сберегателем:

$$\begin{cases} c_1 = 120 - s_1; \\ c_2 = 75 + s_1 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8; \end{cases} \implies \mathrm{c}_2 = 75 + 0{,}96(120 - s_1).$$ **(4 балла)**

Мы знаем из оптимизационной задачи, что $c_1 = \frac{120}{0{,}96 \cdot \delta} = \frac{125}{\delta}$.**(2 балла)**

Если Петя сберегатель, то $c_1 < 120$: $\frac{125}{\delta} < 120$ или $\delta > \frac{125}{120} > 1$. Однако δ должно быть меньше 1 **(2 балла)**.

Это говорит о том, что Пете не выгодно сберегать вообще, если имеется налог.

. 11 класс. Задача 2. Минералы и налоги (30 баллов)

$TC_i(q_i) = 0^5 q_i^2 + 4q$
$Q = 100 - P$

1. Оптимизационная задача каждой фирмы:
$\pi_i(q_i) = (100 - Q)q_i - 0^5 q_i^2 - 4q_i - tq_i \underset{q_i}{\longrightarrow} max$ **(2 балла)**
$\pi_i(q_i)' = 100 - 2q_i - q_{-i} - q_i - 4 - t = 0$
$\pi_i(q_i)'' = -3 < 0 \longrightarrow max$ или $\pi_i(q_i)$ - парабола ветвями вниз **(2 балла)**
$q_i = \frac{96 - t - q_{-i}}{3}$
Фирмы симметричные, поэтому в равновесии: $q_1^* = q_2^* = q^*$ **(1 балл)**
$q_i = 24 - \frac{t}{4}$
Налоговые сборы равны: $T = 2 * t * q^* = 2t(24 - \frac{t}{4} \underset{t}{\longrightarrow} max$
$T' = 48 - t = 0$ **(1 балл)**
$T'' = -1 < 0 \longrightarrow max$ или $T(t)$ - парабола ветвями вниз
$t^* = 48$**(1 балл)**, $q^* = 12$ **(1 балл)**
$T = 2 * 12 * 48 = 1152$**(1 балл)**
$\pi^* = (100 - 24) * 12 - 144/2 - 48 - 48 * 12 = 216$**(1 балл)**

2. Налог на прибыль никак не влияет на производственный оптимум фирмы, поэтому каждая фирма будет производить 24 кг минерала.
$\pi_i^g = (1 - g)\left[(100 - 48) * 24 - \frac{24^2}{2} - 4 * 24\right] = (1 - g) * 864$**(4 балла)**
Пусть G - налоговые сборы: $G = 2 * 864 * g = 1728g$**(2 балла)**
$g = \frac{1152}{1728} = \frac{2}{3}$**(1 балл)**
$\pi^g = \frac{864}{3} = 288$**(2 балла)**

3. Если выбирается ставка налога t на кг добытого минерала, то: $T(t) = 48t - \frac{t^2}{2} \geq 1024$**(2 балла)**
$t_{1,2} = 48 \pm 16$
$t_1 = 64 - \varnothing$ не подходит (минимальная добыча)
$\boxed{\mathrm{t}_2 = 32}$**(2 балла)**
$q(t = 32) = 16$**(1 балл)**
$p = 100 - 32 = 68$**(1 балл)**
$\pi_i^t = 68 * 16 - \frac{256}{2} - 4 * 16 - 32 * 16 = 384$**(1 балл)**
Если выбирается налог на прибыль g, то: $g \geq \frac{1024}{1728} = \frac{16}{27}$**(2 балла)**
$\pi_i^g = \frac{864 * 11}{27} = 352$**(1 балл)**
Король выбирет налог $t = 32$ денежных едениц на кг добытого минерала. Будет добыто 32 кг. В этом случае фирмы получают наибольшую прибыль.**(1 балл)**

Альтернативная трактовка (принятие решения на основе наибольшего выпуска)
Налог на прибыль не меняет оптимальное количество **(1 балл)**

Обоснование этого утверждения: есть выражение для прибыли π_i^g (см. пункт 2) **(2 балла)**
Производимое количество при введении потоварного налога меньше, чем при налоге на прибыль **(2 балл)**
Обоснование этого утверждения: есть выражения для q_1 и q_2 в 1 пункте задачи. Например: q_1=q_2=24 − $\frac{t}{4}$,
Q=48 − $\frac{t}{2}$ **(2 балл)**
Посчитан объем производства $Q = 48$ **(2 балла)**
Посчитан налог на прибыль $g \geq \frac{1024}{1728} = \frac{16}{27}$ **(2 балла)**

. 11 класс. Задача 3. Внешние эффекты (45 баллов)

$TC = 0{,}25Q^2 + 20Q$
$TU = 240Q - 0{,}375Q$

1. В оптимуме $P = MU(Q^\star)$, так как потребители получают максимальную полезность, когда пределельная полезность была равна его цене.
   $P = 240 - 0{,}75Q \longleftarrow$ обратная функция спроса
   или $Q = 320 - \frac{4}{3}P$ **(2 балла)**

2. Составляем задачу максимизации прибыли монополии:
   $\pi = (240 - 0{,}75Q)Q - 0{,}25Q^2 - 20Q \underset{Q}{\longrightarrow} max$
   (2 балла) $\pi' = 240 - 1^5q - 0^5q - 20 = 0$
   (1 балл) $Q^\star = 110, P^\star = 157{,}5$ **(3 балла за объем; 1 балл за цену)**

3. $L = 1{,}5d, d = 0{,}5q^2$
   $L = 1{,}5 * 0{,}5 * 110^2 = 9075$ **(2 балла)**

4. $SW = 240Q - 0^375Q^2 - 1{,}5 * 0{,}5Q^2 - 0{,}25Q^2 - 20Q$ **(2 балла)**
   $SW' = 220 - 2{,}75Q = 0$
   $Q^o = 80$ **(3 балла)**
   $SW'' = -2{,}75 < 0 \overset{m}{\longrightarrow} ax$ или парабола ветвями вниз **(1 балл)**

5. Налог по ставке t на каждый литр отходов меняет функцию издержек:
   $TC^t = 0{,}25Q + 20Q + t * d = Q^2(0{,}25 + 0{,}5t) + 20Q$
   $MC^t = (0{,}5 + t)Q + 20$**(3 балла)**
   $\pi^t = (240 - 0{,}75Q)Q - Q^2(0{,}25 + 0{,}5t) - 20Q \underset{Q}{\longrightarrow} max$**(2 балла)**
   $\pi^{t'} = 240 - 1{,}5Q - 20 - (0{,}5 + t)Q = 0$
   $\pi^{t'} = -2 - t < 0 \longrightarrow max$ или π^t парабола ветвями вниз**(1 балл)**
   $Q^t = \frac{220}{2+t}$
   Оптимум $Q^o = 80$ **(2 балла)**, $\frac{220}{2+t} = 80, t = 0^75$**(2 балла)**
   $d^o = 0^5 * 80^2 = 3200$**(1 балл)**
   $Tax = 3200 * 0{,}75 = 2400$ **(2 балла)**

6. В этом случае благосостояние общества имеет вид: $SW = 240Q - 0^375Q^2 - 1^5(0^5Q^2 - Z) - 0^25Q^2 - 20Q - \frac{Z^2}{2000}$ **(4 балла)**
   Максимизируем по Q и Z
   SW состоит из двух квадратных уравнений по Q и Z. Это две параболы ветвями вниз - две max.**(2 балла)**
   $SW'_Q = 220 - 2^75Q = 0, Q^o = 80$**(1 балл)**
   $SW'_Z = 1^5 - \frac{Z}{1000} = 0, Z^o = 1500$ **(1 балл)**

7. Необходимо сравнить сумму налога и затраты на очистку вод, так как производство мебели одинаковов в обоих случаях. **(3 балла)**
   $Tax = 2400$
   Затраты на очистку воды: $\frac{1500}{2000} = 1125$
   Фирме выгоднее заняться очищением сточных вод. Интуитивно такой результат можно объяснить тем, что налог искажает оптимальный объем производства мебели, так как меняется структура производственных издержек, связанных непосредственно с мебелью. Затраты на очистку воды не влияют на производственный оптимум и не искажают его. **(4 балла)**

. 11 класс. Задача 4. Новогодний салют

n семей, W — доход.

Полезность: $U_i = a_i \ln C + x_i$.

$x_i - w - s_i$, где s_i — вклад семьи i в расходы на салют.

$C = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

$0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$.

1. **(2 балла за пункт 1)**
   Возникает проблема безбилетника. Общественное благо неконкурентно и неисключаемо, поэтому даже неоплатившие салют могут в полной мере насладиться зрелищем. **(2 балла**

2. **(8 баллов за пункт 2)**
   Составим оптимизационную задачу каждой семьи и найдем потребное количество залпов салюта для каждой:

$$\begin{cases} U_i = a_i \ln C + x_i \longrightarrow \max; \\ x_i = W - s_i; \\ c = \sum_{i=1}^{n} s_i. \end{cases} \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$U_i = a_i \ln\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right) + w - s_i \underset{s_i}{\longrightarrow} \max . \textbf{(1 балла)}$$

$$U_i' = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n} s_i)} - 1 = 0.$$

$$U_i'' = -\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n} s_i)^2} < 0. \textbf{(1 балла)}$$

   Получается, что для семьи i потребное количество залпов салюта $C = a_i$. **(1 балла)**

   Все семьи понимают, что максимальная потребность в салюте у семьи с параметром $a_n = 1$. Только эта семья в итоге оплатит свой вклад $s_n = 1$. Остальные будут «безбилетниками», их потребное количество залпов салюте меньше.**2 балла)** Будет произведен только один залп.**(1 балла)**

3. **(5 баллов за пункт 3)**
   n — нечётное.

   Если салют состоится, то затраты поровну делятся между всеми семьями $\Longrightarrow s_i = \overline{s} = \frac{C}{n}$.

   Решение о проведении салюте зависит от медианной семьи с параметром a_m. Оптимальное количество салюта для этой семьи определяется как:

$$U_m = a_m \ln C + w - \overline{s} = a_m \ln C + W - \frac{C}{n} \underset{C}{\longrightarrow} \max . \textbf{(2 балла)}$$

$$U_m' = \frac{a_m}{C} - \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{C}_m = n \cdot a_m} . \textbf{(1 балла)}$$

$$U_m'' = -\frac{a_m}{C^2} < 0. \textbf{(2 балла)}$$

   Значит найденное значение — действительно точка максимума.

4. **(5 баллов за пункт 4)**

$$SW = \sum_{i=1}^{n} (a_i \ln C + x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \ln C + \sum_{i=1}^{n} w - C \underset{C}{\longrightarrow} \max . \textbf{(2 балла)}$$

$$SW' = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{C} - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{C}^* = \sum_{i=1}^{n} a_i}, \ \overline{s} = \frac{C^*}{n}. \textbf{(2 балла)}$$

$$SW'' = -\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{C^2} < 0.\textbf{(1 балла)}$$

Значит найденное значение — действительно точка максимума.

5. **(10 баллов за пункт 5)**
$SW = \min\{a_i \ln C + x_i\}_{i=1,\dots,n} \longrightarrow \max.$

Пусть семья с параметром k является семьей с наименьшей полезностью и нам нужно её максимизировать:

$$U_k = a_k \ln C + w - \frac{C}{n} \underset{C}{\longrightarrow} \max.\textbf{(2 балла)}$$

$$U_k' = \frac{a_k}{C} - \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{C}_m = n \cdot a_k}.\textbf{(2 балла)}$$

$$U_k'' = -\frac{a_k}{C^2} < 0.\textbf{(1 балла)}$$

Значит найденное значение — действительно точка максимума.

Теперь найдем семью с наименьшей полезностью:

$$U_k(c = n \cdot a_k) = a_k \ln(n \cdot a_k) = w - \frac{n \cdot a_k}{n} = a_k \ln(n \cdot a_k) + w - a_k \underset{a_k}{\longrightarrow} \min.\textbf{(2 балла)}$$

$$U_k' = \ln(n \cdot a_k) + \frac{a_k \cdot n}{n \cdot a_k} - 1 = 0; \Longrightarrow \ln(n \cdot a_k) = 0; \Longrightarrow n \cdot a_k = 1; \Longrightarrow \boxed{\mathrm{a}_k = \tfrac{1}{n}}.\textbf{(2 балла)}$$

$$U_k'' = \frac{n}{n \cdot a_k} > 0.$$

Значит найденное значение — действительно точка минимума.

Оптимальное количество залпов салюта: $c = n \cdot \frac{1}{n} = 1$**(1 балла)**